MA1 - Domácí úkol č.3 - limita funkce .

Užitečné zkratky: AL – aritmetika limit;
VLSF – věta o limitě složené funkce.
VOS – věta o limitě sevřené funkce (o strážnících).

Vypočítejte limity:

1. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{-1}{(x+3)^2} =$ „ $\dfrac{-1}{0+}$ “ $\underset{AL}{=} -\infty$

Poznámka: AL „říká“: „$\dfrac{1}{0+} = +\infty$“, „$\dfrac{1}{0-} = -\infty$“
a zde jmenovatel $(x+3)^2 > 0$ v $P(-3)$;
Při výpočtu limity je „dobré“ vždy naznačit „typ“ limity, zde „$\dfrac{-1}{0+}$“, pak se snáze hledá „cesta“ k řešení.

2. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+1}{x^2-1} =$ „ $\dfrac{2}{0}$ “ ? zde opět, jako v příkladu 1, potřebujeme znaménko jmenovatele, tj. znaménko výrazu x^2-1, blízko $x=1$; ale zde, pro $x \in P_+(1)$ je $x^2-1>0$, pro $x \in P_-(1)$ je $x^2-1<0$, tedy můžeme dle AL určit zde jen limity jednostranné:

zprava: $\lim\limits_{x\to 1+} \dfrac{x^2+1}{x^2-1} =$ „ $\dfrac{2}{0+}$ “ $\underset{AL}{=}$), zleva: $\lim\limits_{x\to 1-} \dfrac{x^2+1}{x^2-1} = \dfrac{2}{0-} = -\infty$;)

tedy, protože $\lim\limits_{x\to 1+} \dfrac{x^2+1}{x^2-1} \neq \lim\limits_{x\to 1-} \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$, funkce

$f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ v bodě $a=1$ limitu nemá.

3. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+3x+2}{1-x^2} =$ „ $\dfrac{0}{0}$ “ $\underset{(*)}{=} \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x+1)(x+2)}{(1+x)(1-x)} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+2}{1-x} \underset{AL}{=} \dfrac{1}{2}$

Zde „máme“ neurčitý výraz „$\dfrac{0}{0}$“, a tedy „hledáme“ výrazy, které jsou „téměř nulami“ – zde oba polynomy musí mít kořenový činitel $(x+1)$ (když $x=-1$ je kořenem), tedy lze provést úpravu (*) – „zviditelníme“ nuly, a ty pak lze krátit a problém už není (dále AL).

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin 3x} = „\frac{0}{0}“ = \lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{\sin(3x)}\cdot\frac{x}{3} \underset{AL+VLSF}{=} 1\cdot 0 = 0$

Zde je opět limita typu „$\frac{0}{0}$“, dle rady, pokud funkce, jejíž limitu máme určit, obsahuje „goniometrickou funkci“, hledáme „v ní“ limitu („taháková“) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ – zde spolu s VLSF pak je $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{3x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{\sin(3x)} = 1$

5. $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{\operatorname{arctg} x}{x^3} = „\frac{-\frac{\pi}{2}}{-\infty}“ = 0$

Zde lze přímo užít pravidlo AL: „$\frac{1}{+\infty} = 0$“ i „$\frac{1}{-\infty} = 0$“, tedy, $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{\operatorname{arctg} x}{x^3} = „-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{-\infty}“ \underset{AL}{=} „-\frac{\pi}{2}\cdot 0“ = 0$

6. $\lim\limits_{x\to +\infty}\arcsin\left(\frac{x^2-1}{2x^2+1}\right) \underset{VLSF}{=} \lim\limits_{y\to\frac{1}{2}}\arcsin y \underset{\substack{\text{spojitost}\\ \arcsin y}}{=} \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}.$

Zde se jedná o limitu složené funkce – a užijeme postup z VLSF;

(i) limita vnitřní funkce $y = \frac{x^2-1}{2x^2+1}$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2+1} = „\frac{\infty}{\infty}“ = \lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(2+\frac{1}{x^2}\right)} \underset{AL}{=} \frac{1}{2}\quad\left(\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2} = 0\right)$$

(ii) pak (VLSF)

$$\lim_{x\to\infty}\arcsin\left(\frac{x^2-1}{2x^2+1}\right) = \lim_{y\to\frac{1}{2}}\arcsin y = \arcsin\frac{1}{2}$$

7. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\sin x}{2x} = „\frac{\text{neexistuje}}{\infty}“$ – pomocí „škrtící“ (VOS):

$-1 \leq \sin x \leq 1$ (v R), tedy (stačí pro $x\to\infty$ brát $x>0$) je

$-\frac{1}{2x} \leq \frac{\sin x}{2x} \leq \frac{1}{2x}$; a protože $\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{2x}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{2x} = 0$,

dle VOS je i $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{2x} = 0.$

8. $\lim\limits_{x\to 2-} \ln\left(\frac{2-x}{1+x}\right) \underset{\text{VLSF}}{=} \lim\limits_{y\to 0+} \ln y = -\infty$

limita „vnitřní" funkce: $\lim\limits_{x\to 2-} \frac{2-x}{1+x} = \text{„}\frac{0}{3}\text{"} \underset{\text{AL}}{=} 0$ $\left(a \ \frac{2-x}{1+x} > 0 \text{ v } P_-(2) \right)$

9. $\lim\limits_{x\to -1+} \ln\left(\frac{2-x}{1+x}\right) \underset{\text{VLSF}}{=} \lim\limits_{y\to \infty} \ln y = +\infty$

limita „vnitřní" funkce: $\lim\limits_{x\to -1+} \frac{2-x}{1+x} = \text{„}\frac{3}{0+}\text{"} \underset{\text{AL}}{=} +\infty$

$(1+x > 0 \text{ v } P_+(-1))$

10. $\lim\limits_{x\to 0} \exp\left(\frac{tg\, 3x}{x^2}\right) =$ oboustranná limita pro $x\to 0$ neexistuje:

opět - limita složené funkce, tedy nejprve „určíme" limitu

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{tg\, 3x}{x^2} = \text{„}\frac{0}{0}\text{"} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{tg\, 3x}{3x} \cdot \frac{3}{x} \underset{\text{VLSF}+\text{T}}{=} \text{„}1 \cdot \frac{3}{0}\text{"}, (*)$

hledáme $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin t}{t}$ (T) - zde stačí „$\lim\limits_{t\to 0} \frac{tg\, t}{t} = 1$ (T)

ale $x>0$ v $P_+(0)$ a $x<0$ v $P_-(0)$, tedy, dle AL:

$\lim\limits_{x\to 0+} \frac{tg\, 3x}{x^2} \underset{(*)}{=} \text{„}1 \cdot \frac{3}{0+}\text{"} = +\infty$, a $\lim\limits_{x\to 0-} \frac{tg\, 3x}{x^2} \underset{(*)}{=} \text{„}1 \cdot \frac{3}{0-}\text{"} = -\infty$,

a pak (VLSF):

$\lim\limits_{x\to 0+} \exp\left(\frac{tg\, 3x}{x^2}\right) \underset{(\text{VLSF})}{=} \lim\limits_{y\to +\infty} e^y = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0-} \exp\left(\frac{tg\, 3x}{x^2}\right) = \lim\limits_{y\to -\infty} e^y = 0$,

tedy, funkce $f(x) = \exp\left(\frac{tg\, 3x}{x^2}\right)$ v bodě $x=0$ limitu nemá.